

## AGULHA DE BUFFON

Alexandre Scheidt, Diego Rodrigo Hachmann, João Candido Bracarense,  
Odair Moreira de Souza, Juliano Rodrigo Lamb e-mail:  
alescheidt@gmail.com

Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Centro de Ciências Exatas e  
Tecnológicas – Cascavel – PR  
Faculdade Sul Brasil – Toledo – PR – Brasil

**Palavras-chave:** Monte Carlo, algoritmo computacional, matemática aplicada.

### Resumo:

Agulha de Buffon é um problema de probabilidade inventado pelo cientista francês Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, no início do século XVIII, utilizando o método de simulação de Monte Carlo. Através de um algoritmo computacional e milhões de jogadas. Deseja-se chegar a um valor aproximado do valor de  $\pi$ . Mostrando assim, de um modo experimental, o teorema de agulha de Buffon.

### Introdução

O estudo das integrais trigonométricas é um tema bastante interessante, talvez, por ser um tema novo ao estudante recém participante do ensino superior. Várias são as aplicações, tanto do ponto de vista acadêmico, quanto à vida cotidiana.

Um dos estudos que permite o uso do termo interdisciplinar, sem dúvida, é o problema da agulha de Buffon, pois envolve diversos conteúdos visando encontrar, como consequência, um valor aproximado do número  $\pi$  ( $\pi$ ).

Segundo Boyer (1974), cabe a Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, um teste empírico do Paradoxo de S. Petersburgo, e também a autoria de uma célebre História Natural, em vários volumes. Buffon era conhecido pelos cientistas como um iconoclasta que propôs uma avaliação de cerca de 75.000 anos para a idade da terra, em vez de 6.000 anos então comumente aceita.

Os matemáticos conhecem Buffon por duas contribuições: uma tradução para o francês do “Método dos fluxos de Newton” e o “problema da agulha de Buffon” na teoria das probabilidades. Ele sugeriu, também, o que era essencialmente um novo ramo da teoria das probabilidades, problemas envolvendo considerações geométricas.

Leclerc propôs que sobre uma grande área plana se traçassem retas paralelas eqüidistantes e que uma agulha fina fosse lançada ao acaso sobre a área plana, a probabilidade de a agulha cair cortando uma das retas é

corretamente como sendo  $2L / \pi d$ , sendo  $d$  a distância entre as retas e  $L$  o comprimento da agulha,  $d \leq L$ .

O matemático que mais se destacou na teoria das probabilidades, no entanto, foi Laplace e é dele a frase “no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números.”, Boyer (1974).

Entre as muitas teorias a que Laplace chamou a atenção em sua Teoria Analítica foi o cálculo de  $\pi$  através do problema da agulha de Buffon que tinha sido praticamente esquecido por quase meio século. Esse é conhecido com o problema da agulha Buffon-Laplace, pois este matemático estendeu o problema original a um reticulado de duas coleções perpendiculares entre si de retas paralelas eqüidistantes.

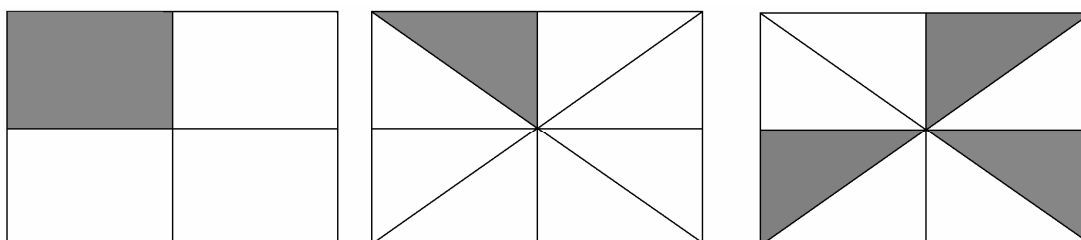
O presente trabalho apresenta, em linhas gerais, o problema da agulha de Buffon, vista com o apoio geométrico e em seguida no formato computacional.

## **Materiais e Métodos**

De posse com os termos de Simmons (1987) apresenta-se a metodologia referente ao problema específico.

Inicia-se com uma breve digressão para explicar o uso que se faz da palavra “probabilidade”. Em Matemática essa palavra significa uma medida numérica da possibilidade de certo evento acontecer.

Por exemplo, considere o retângulo mostrado à esquerda da Figura 1, em que uma parte da figura está sombreada. Um ponto é escolhido ao acaso nesse retângulo, fazendo, por exemplo, o retângulo de alvo e atirando, com os olhos vendados, um dardo. A probabilidade de que o ponto escolhido esteja na parte sombreada é de  $\frac{1}{4}$ . Admite-se aqui que é tão provável escolher um ponto determinado como outro qualquer. O número  $\frac{1}{4}$  expressa o fato de que a proporção de pontos da parte sombreada entre todos os pontos do retângulo é  $\frac{1}{4}$ . No segundo retângulo, a probabilidade de se escolher um ponto na parte sombreada é de  $\frac{1}{8}$ , e no terceiro retângulo, é  $\frac{3}{8}$ . Tomando com evidente, por si mesmo, que a probabilidade de se escolher um ponto na parte sombreada é igual à razão da área sombreada pela área total.



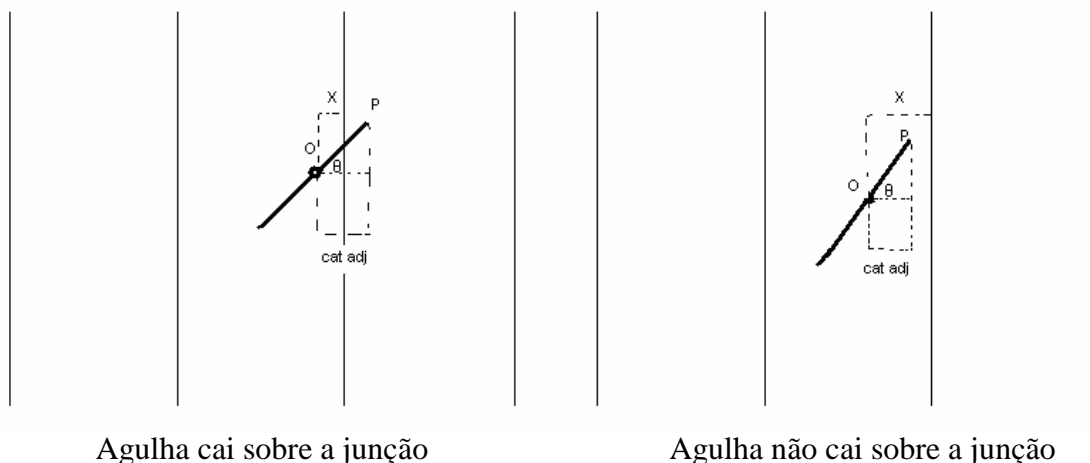
**Figura 1 – Probabilidade de se escolher um ponto na parte sombreada.**

Retornando, agora, ao problema da agulha, descreve-se a posição em que a agulha cai no assoalho pelas duas variáveis  $x$  e  $\theta$ , Figura 2.

Dada uma agulha de 4cm de comprimento, quando jogada ao acaso num assoalho feito de tábuas de 4cm de largura, qual a probabilidade de que a agulha caia atravessando uma das junções?

Seja a distância  $x$  entre o centro da agulha e a junção mais próxima. Não é difícil constatar que, nesse caso, que  $x$  pertence ao intervalo  $[0, 2]$ .

Agora, tomando  $\theta$  como o menor ângulo entre a agulha e uma reta perpendicular as junções, tem-se  $\theta$  pertencente ao intervalo fechado  $[0, \pi/2]$ , Figura 2.



Agulha cai sobre a junção

Agulha não cai sobre a junção

**Figura 2 – Possibilidades da queda agulha no assoalho.**

Analisando a Figura 2, percebe-se que o evento de interesse é aquele que coincide a variável  $x$  ser menor que o cateto adjacente do argumento  $\theta$ .

Mas pelo triângulo retângulo de hipotenusa  $OP$ , tem-se que:

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente de } \theta}{OP}$$

Como a agulha mede 4 cm,  $OP = 2$ , então:

$$\text{cateto adjacente de } \theta = 2 \cos \theta$$

Assim, os seguintes eventos podem ocorrer:

1. Quando  $x < 2 \cos \theta$ , a agulha cairá sobre uma das junções.
2. Quando  $x \geq 2 \cos \theta$ , a agulha não cairá sobre uma das junções.

A interpretação geométrica é dada com o auxílio da Figura 3, assim o gráfico representa todas as possibilidades de eventos, e a parte sombreada representa o evento em que a agulha caiu sobre uma das junções.

Assim:

$$P = \frac{\text{Área sob a curva}}{\text{Área do retângulo}}$$

então:

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}$$

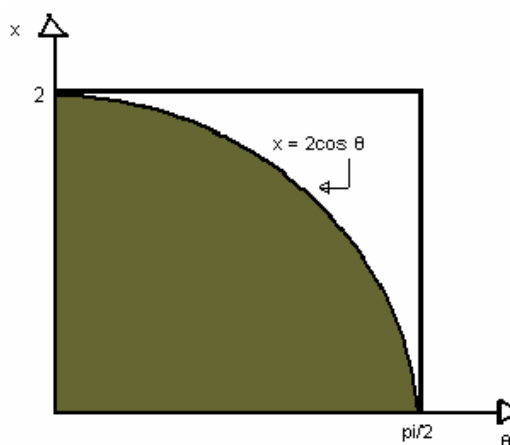


Figura 3 – Representação nas coordenadas cartesianas

Portanto, a probabilidade da agulha cair sobre a junção é

$$P = \frac{2}{\pi}$$

Mas a probabilidade é a razão entre o número de lançamentos em que a agulha caiu sobre a junção e o total de lançamentos.

Tomando como  $n$  o total de lançamentos e como  $k$  o número de vezes em que a agulha caiu sobre a junção, tem-se um valor aproximado de  $\pi$  quando  $n$  tende ao infinito. Ou seja,

$$P = \frac{k}{n} \cong \frac{2}{\pi}$$

E, portanto, no limite, para valores grandes de  $n$ , tem-se:

$$\pi \cong \frac{2n}{k}$$

Os conteúdos necessários para um completo entendimento da agulha de Buffon são: a trigonometria em triângulo retângulo, integração trigonométrica, e, portanto, conhecimentos em cálculo diferencial e integral, a simulação de Monte Carlo e a teoria das probabilidades.

## Resultados e Discussão

Pensando em um algoritmo, tem-se o interesse do seguinte evento: se  $x < 2 \cos \theta$ , então a agulha cai sobre uma das junções. Mas  $x$  e  $2 \cos \theta$  pertencem a  $I = [0, 2]$ . Para efeito de um algoritmo  $x$  e  $\theta$  são valores pseudo-aleatórios.

Considerando que  $x$  é 2 vezes  $\text{rand}(0,1)$ , onde  $\text{rand}$  representa uma função de números reais no intervalo  $[0,1]$ . Então se tem a seguinte desigualdade

$$2\text{rand}(0,1) < 2 \cos \theta$$

desse modo, finalmente, tem-se o evento

$$\text{rand}(0,1) < \cos \theta$$

Assim, apresentam-se dois algoritmos – implementação em C++ (Prata, 1998) – que permitem avaliar o valor de  $\pi$  pela simulação de Monte Carlo ao problema da agulha de Buffon.

Para alcançar os resultados, os algoritmos elaborados utilizaram a plataforma *Windows*.

### O Algoritmo 1

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
/*rand() devolve inteiro no intervalo [0, 2147483647] */
/*gera um número pseudo- randômico real no intervalo [0,1] */
double realRandon(void)
{
    int a = rand();
    int b = rand();
    if(a>b)
        return (double)b/a;
    else
        return (double)a/b;
}
int main(void)
{
    time_t seed = time(NULL);
    clock_t startTime, endTime;
    int i=0, indice=1;
    double distancia, theta;
    long int cont = 0, ponto_atual;
    srand((unsigned)seed);
    startTime = clock();
    while(indice <= 8)
    {
        ponto_atual = (int)pow(10,indice);
        for( ; i<ponto_atual; i++)
        {
            theta = realRandon() * M_PI/2;
            distancia = realRandon();
            if(distancia < cos(theta))
                cont++;
        }
    }
    endTime = clock();
```

```

        printf( "Jogadas: 10^%d  Eventos + : %9li    PI Aprox : %1.7f
%10.2f s.\n",
        indice, cont, 2.0*i/cont, (double)(endTime - startTime) /
CLOCKS_PER_SEC);
        indice++;
    }
    printf("\n\n%35s", "FIM");
    getchar();
}

```

### O Algoritmo 2

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

/*gera um número pseudo-aleatório real no intervalo [0,1] */
float realRandon(void)
{
    int a = rand()%1000;
    int b = rand()%1000;
    if(a>b)
        return (float)b/a;
    else
        return (float)a/b;
}

/*devolve um valor de um cosseno pseudo- aleatório */
float coseno(void)
{
    int a = rand()%1000;
    int b = rand()%1000;
    return ((float)b / sqrt(a*a+b*b));
}

int main(void)
{
    float soma = 0;
    int i, count=0;
    long seed = time(NULL);
    srand((unsigned)seed);
    for(i=0; i<1000000; i++) {
        if(realRandon() < coseno())
            count++;
    }
    printf("%f", 2.0*(float)i /(1.0*count));
}

```

Os resultados específicos dos algoritmos elaborados em um primeiro momento são discutidos em seguida.

No Algoritmo 1, a aproximação do valor de  $\pi$  é bastante boa, Tabela 1, mas a rotina que determina o valor de teta, que será utilizado como argumento do co-seno, utiliza o produto entre um aleatório real unitário e a metade do valor de  $\pi$ .

**Tabela 1: Resultados do Algoritmo 1**

Iterações	Caiu sobre junção	Valor aproximado de $\pi$	Tempo (seg.)
$10^1$	5	4.0000000	0.00
$10^2$	62	3.1935484	0.00
$10^3$	624	3.2051282	0.00
$10^4$	6355	3.1468135	0.00
$10^5$	63680	3.1407035	0.03
$10^6$	636734	3.1410291	0.34
$10^7$	6366903	3.1412447	3.48
$10^8$	63663208	3.1415319	34.45
$10^9$	636643970	3.1414732	345.30

O Algoritmo 1 apresenta um problema, que induz o resultado. Desta forma, construiu-se outro algoritmo que permitisse uma avaliação menos tendenciosa.

No Algoritmo 2, nota-se que não existe uma boa aproximação, o valor converge para 3,08, sendo usado a função 'co-seno' que gera dois número aleatórios que são tratados como cateto adjacente e cateto oposto de um triângulo retângulo, e então é retornado o valor do co-seno do mesmo, conforme Tabela 2.

**Tabela 2: Resultados do Algoritmo 2**

Iterações	Caiu sobre junção	Valor aproximado de $\pi$	Tempo (seg.)
$10^1$	7	2.8571429	0.00
$10^2$	66	3.0000000	0.00
$10^3$	648	3.0864198	0.00
$10^4$	6462	3.0947075	0.00
$10^5$	64789	3.0869438	0.03
$10^6$	649081	3.0812795	0.34
$10^7$	6483425	3.0847893	3.56
$10^8$	64864567	3.0833475	34.86
$10^9$	648594876	3.0835890	322.23

## Conclusões

O presente trabalho propõe uma discussão sobre o problema da Agulha de Buffon e o estudo da probabilidade dentro de um contexto geométrico, algébrico e computacional, considerando dois algoritmos.

O Algoritmo 1 atinge uma aproximação desejada para o valor de  $\pi$ , após 1.000.000.000 lançamentos, no entanto, a semente utilizada parte de um valor de referência de  $\pi$ . Assim, partindo-se de outro valor pseudo-aleatório pode-se não se alcançar uma aproximação satisfatória.

O Algoritmo 2 parte de um valor pseudo-aleatório mais consistente e obtém a aproximação de 3,08 para o valor de  $\pi$ .

Conclui-se, desta forma, que o Algoritmo 2 é mais adequado, e assim, o estudo confirma – experimentalmente (em laboratório) – as conclusões do conde de Buffon.

## Referências

- Boyer, C. B. História da Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1974. 488p.
- Prata, S. C++ The Waite Group's Primer Plus. Third Edition. Final ANSI/ISSO Standard C++. Sams Publishing. 1998. 1040p.
- Simmons, G. F. Cálculo com geometria analítica. Volume 1. McGraw-Hill. Rio de Janeiro. 1987. p.428-431.