

EMPREGO DE MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA A OBTENÇÃO DO MÓDULO DE CISALHAMENTO EM SISTEMAS COMPLEXOS

Ellen C. Borin, Patrícia H. Yassue, Rafael L. S. Canevesi, Rodrigo A. Barella, Fernando R. Espinoza Quiñones (Orientador/UNIOESTE).
e-mail: ellen_borin@hotmail.com

Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Centro de Engenharias e Ciências Exatas – Toledo – PR.

Palavras-chave: Balança de Torção, Módulo de Torção, Momento de Inércia

Resumo:

A análise da oscilação de uma balança de torção é freqüente, sendo comum avaliar a variação do Módulo de Torção (K). A Balança de Torção é útil para determinar Momentos de Inércia de objetos de forma complexa, como uma roda de engrenagem, ou uma hélice de avião. No entanto, a dificuldade em determinar o seu valor encontra-se na sua dependência em relação a outras grandezas do sistema de medida, em especial o Momento de Inércia (I), o Módulo de Cisalhamento específico de cada material (S) e do Período de oscilação da barra (T). O presente estudo teve como finalidade, a obtenção de um método para o cálculo do Momento de Inércia de corpos com geometria desconhecida, calibrando a balança de torção com objetos que tem os Momentos de Inércia conhecidos na literatura. Como resultado o Momento de inércia obtido através dos parâmetros otimizados corresponderam ao Momento de inércia medido com base na geometria do sistema, possibilitando assim estimar o módulo de cisalhamento com boa confiabilidade.

Introdução

O movimento oscilatório, muito comum no cotidiano, é um caso especial de movimento periódico. É considerado oscilatório ou vibratório quando se repete identicamente em intervalos de tempo iguais, definindo movimento harmônico simples angular como a rotação do disco de um ângulo θ , tanto em um sentido como no outro, introduzindo um torque restaurador.

No estudo, foi usado um dispositivo chamado balança de torção. O qual é constituído por um fio de determinado material, preso em uma das extremidades, tendo suspenso na outra um corpo com uma determinada massa, submetendo esse corpo à ação de um Momento Torcional com a direção do eixo e abandonando-o em seguida. O corpo fica sujeito a forças que o fio exerce sobre ele, ficando a oscilar e desenvolvendo um movimento harmônico simples angular.

Sendo as duas massas iguais, o período da balança é determinado pelo Momento de Inércia do sistema, que depende da distância entre as

massas e o centro da rotação. A distância é diretamente proporcional ao Momento de Inércia e ao período da balança.

O Momento de inércia consiste na facilidade ou dificuldade de um corpo entrar em movimento de rotação. É uma grandeza na qual não há possibilidade de obtenção de forma direta. Para o cálculo do Momento de Inércia existem diferentes modelos. Um dos mais utilizados é o que se baseia na forma geométrica do corpo (HALLYDAY, 1996), representado pela equação (1), outro método utilizado por Macedo (2002) baseia-se no emprego de cálculo numérico para a obtenção do Momento de Inércia em sistemas complexos.

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Onde I é o Momento de Inércia, r é o raio e dm um diferencial de massa.

O módulo de torção é uma grandeza extrínseca, ou seja, depende das dimensões do fio (comprimento e diâmetro). Entretanto, o seu conhecimento, junto com o período de oscilação, pode levar a uma grandeza intrínseca, própria do material do fio, denominada de módulo de cisalhamento (S). Dessa forma, O corpo sólido que sofre uma torção está sujeito a uma tensão de cisalhamento que gera deformações em torno do eixo do cilindro. Para deformações pequenas o corpo se comporta como um sistema elástico, podendo voltar à sua condição inicial após ter cessado a força externa (ESPINOZA QUIÑONES, 2008), relacionando linearmente a deformação angular e a força elástica restauradora governada pela Lei de Hooke.

Materiais e Métodos

Materiais Utilizados

- Uma balança de torção básica para mecânica, composta por: uma haste cilíndrica vertical acoplada, na parte de baixo, a uma mesa quadrada com quatro sapatas niveladoras e amortecedoras, e na parte de cima, a um suporte horizontal;
- Duas pequenas hastes auxiliares, com furo transversal central passante e parafusos nos seus extremos, para prender o arame;
- Duas travas auxiliares de latão para corpos de provas;
- Duas hastes com corpo central e com rebaixas nos extremos (no caso as varetas), de comprimentos de 10 e 20 cm;
- Um jogo de pesos (discos de aprox. 50 gramas e cestas de aprox. 15 gramas);
- Três fios de aço de 0,45 mm de diâmetro para torção com comprimentos de 150, 200 e 250 mm, como corpo de prova;
- Um cronômetro digital, uma régua, um transferidor, e uma balança.

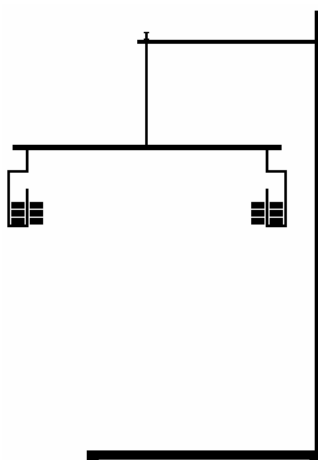


Figura 2 – Balança de torção

Montagem do experimento

Os experimentos envolvendo Módulo de Torção foram feitos no laboratório de Física Experimental II da UNIOESTE.

Inicialmente obtiveram-se os parâmetros necessários para a determinação do Momento de Inércia do sistema, a massa dos fios, das barras e dos pesos e o comprimento dos fios e das barras.

Esses parâmetros foram medidos em cada um dos 12 sistemas formados, sendo que a configuração de cada sistema pode ser visualizada conforme a seguinte tabela 1:

Tabela 1 – Configurações do Sistema

Sub-Índice	Comprimento do Fio (m)	Comprimento da Barra (m)	Peso (kg)
1	0,15	0,11	0,07
2	0,20	0,21	0,12
3	0,25	-	-

Tabela 2 – Sub-Índices das Configurações do Sistema

Configuração de cada Sistema			
A ₁₁₁	A ₁₁₂	A ₁₂₁	A ₁₂₂
A ₂₁₁	A ₂₁₂	A ₂₂₁	A ₂₂₂
A ₃₁₁	A ₃₁₂	A ₃₂₁	A ₃₂₂

Em que os sub-índices na Tabela 2, correspondem a cada configuração do sistema, em termos do comprimento do fio, tamanho da barra de torção e pesos de bronze.

Em seguida foi montado o sistema da balança de torção. Com a barra fixada na trava inferior ligada ao fio, foram colocados pesos nas duas extremidades da barra, de forma que a mesma ficasse em equilíbrio.

Com esse sistema, o peso de uma das extremidades laterais da barra foi submetido a um torque, tal que o ângulo θ deslocado da posição original deve ser suficientemente pequeno para que $\text{Sen}(\theta) \cong \theta$, esta é a condição necessária para que haja um movimento oscilatório harmônico, em que a lei de Hooke é válida, tendo uma resposta linear referente ao torque aplicado.

A partir da aplicação de um torque na extremidade da barra, foi medido o período de 10 oscilações harmônicas da mesma, para que o erro na medição do mesmo se minimizasse. Com este valor foi determinado o período médio de uma oscilação e seu desvio padrão.

Modelagem Matemática

A partir dos valores de período médio de oscilação para cada sistema em questão, foi feita a análise dos dados de forma que o período (T) pode ser relacionado com o Momento de Inércia (I) seguindo a equação (2).

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{K}} \quad (2)$$

Considerando-se o período quadrático, pode ser obtida uma relação linear entre o período e o Momento de Inércia, em que o coeficiente angular da reta leva em conta o valor do módulo de torção (K). Para se obter um valor satisfatório do módulo de torção, foi aplicado o método de regressão linear para cada fio, com quatro variações diferentes de período e Momento de Inércia, alterando das barras e dos pesos.

Portanto, para cada fio utilizado, foi obtido um valor do módulo de torção a partir da relação proposta pela equação (3).

$$K = \frac{4\pi^2}{B_1} \quad (3)$$

Em que o parâmetro B_1 é o coeficiente angular da reta ajustada através de uma regressão linear, do gráfico T^2 versus I , onde o I é calculado com base na geometria do sistema. Uma vez que se utilize de corpos dos quais a obtenção do Momento de Inércia através da geometria não seja tão trabalhosa.

Com os valores dos módulos de torção para cada um dos três fios submetidos ao experimento, foi utilizado novamente o método estatístico de regressão para se obter um valor otimizado do parâmetro C , dependente do material, este tal qual o módulo de cisalhamento também depende, de tal forma a obedecer a ser expressa pela equação (4).

$$K = \frac{C \cdot D^4}{L} \quad (4)$$

Em que D é o diâmetro do fio, e L seu comprimento.

Dessa forma pode ser obtida uma relação linear considerando o valor do módulo de torção e o inverso do valor do comprimento de cada fio, para o qual o coeficiente angular da reta ajustada é expresso pela equação (5).

$$B_2 = C \cdot D^4 \quad (5)$$

Em que B_2 é o coeficiente angular obtido da reta ajustada entre o módulo de torção versus o inverso do comprimento.

Reescrevendo a equação (5) tem-se:

$$C = \frac{B_2}{D^4} \quad (6)$$

Assim, obtém-se o valor do parâmetro C , e pode-se calcular o valor do módulo de cisalhamento (S) do material do fio, a partir da relação matemática representada pela equação (7).

$$K = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot S}{L} \quad (7)$$

Para o valor do módulo de cisalhamento calculado, que deve ser único e depende do material, foi feita sua verificação a partir de uma comparação com o Momento de Inércia calculado a partir dos aspectos de massa e geometria do material, fazendo uso da relação entre essas grandezas proposta pela equação (1).

Utilizando para o caso em questão, a equação (1) se transforma na equação (8).

$$I_{teórico} = \frac{(R^2 + r^2) \cdot m}{2} \quad (8)$$

E o Momento de Inércia calculado a partir do valor de S obtido experimentalmente, através da equação (9).

$$I_{experimental} = \frac{T^2 \cdot r^4 \cdot S}{2Lr} \quad (9)$$

A propagação do erro experimental na obtenção do parâmetro C é calculada empregando as derivadas parciais, obtendo a equação (10) como método de cálculo do erro experimental.

$$dC = \sqrt{\left(\frac{dB_2}{D^4}\right)^2 + \left(\frac{-4B_2}{D^5} \cdot dD\right)^2} \quad (10)$$

Em que B é o coeficiente angular da reta ajustada da regressão linear entre o módulo de torção e o inverso do comprimento do fio e D é o diâmetro do fio.

Já o erro teórico do Momento de Inércia do cilindro é obtido empregando a equação (11).

$$dI_{cilindro} = (MR + Mr)dr \quad (11)$$

Sendo M é a massa do cilindro, R e r são os raios maiores e menores do cilindro, respectivamente, e dr é o erro na medição dos raios.

O erro experimental na obtenção do Momento de Inércia do cilindro e descrito pela equação (12).

$$dI = \sqrt{\left(\frac{8T \cdot r^4 \cdot C}{L\pi^2} \cdot dT\right)^2 + \left(\frac{16T^2 \cdot r^3 \cdot C}{L\pi^2} \cdot dr\right)^2 + \left(\frac{-4T^2 \cdot r^4 \cdot C}{L^2\pi^2} \cdot dL\right)^2 + \left(\frac{4T^2 \cdot r^4 \cdot C}{L\pi^2} \cdot dC\right)^2} \quad (12)$$

Sendo T é o período de oscilação, L é o comprimento do fio, r é o raio do cilindro e C é o parâmetro característico do material do fio.

O erro é calculado pela expressão matemática descrita na equação (13), que por sua vez foi obtida por meio de derivadas parciais.

$$dS = \frac{8}{\pi} dC \quad (13)$$

Sendo dC é o erro no parâmetro característico do material.

Resultados e Discussão

Os dados experimentais obtidos no experimento, que são o período e o Momento de Inércia de cada sistema, foram linearizados (período quadrático) e seguem no gráfico abaixo:

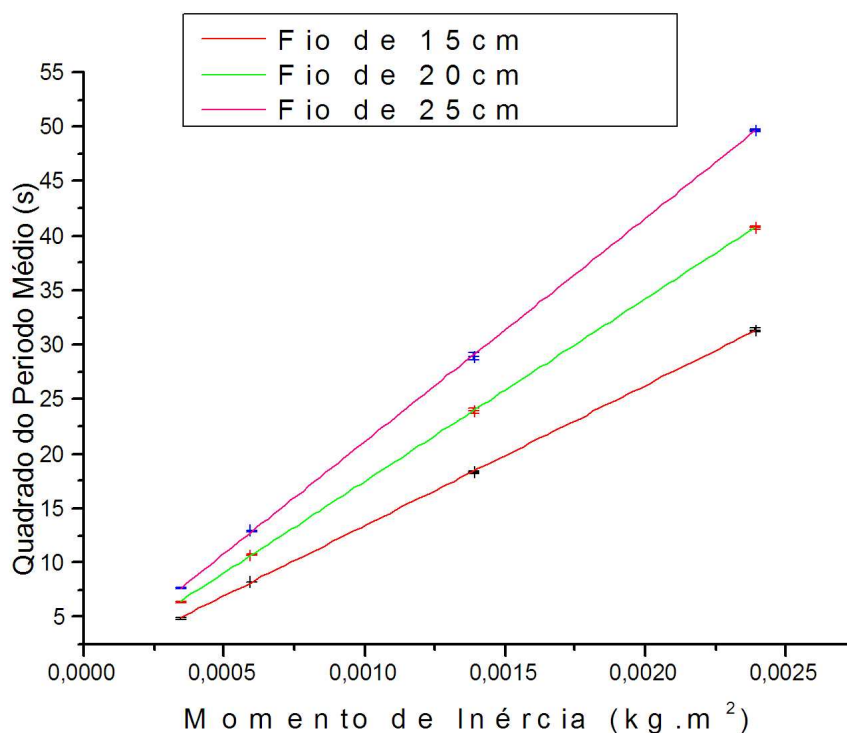


Figura 2 – Momento de Inércia pelo quadrado do período médio.

Pelo gráfico, é possível concluir que quanto maior é o comprimento do fio, maior o seu período de oscilação, sendo que o Momento de Inércia em cada configuração é praticamente invariável em relação aos fios utilizados, pois a massa dos mesmos é muito pequena e é desprezível em relação aos momentos calculados das barras e dos pesos.

Através de uma regressão linear e da aplicação da equação (2), pode ser obtido o módulo de torção para cada fio, que segue na tabela 1.

Tabela 3 – K Obtidos Para Cada Comprimento de Fio

Comprimento Fio(m)	K(kg.m ² .s ⁻²)
0,15	3067 ± 20

0,2	2354 ± 11
0,25	1925 ± 5

A partir dos valores do módulo de torção para cada comprimento de fio, calcula-se o valor do módulo de cisalhamento, que depende do parâmetro C. Os valores obtidos foram calculados a partir de uma regressão linear do K pelo inverso do comprimento do fio, e utilizando-se da equação (6).

Tabela 4 – Parâmetros Obtidos Neste Trabalho

Parâmetros Estimados e Unidade	Valor
C (kg.s ² /m)	1,045.10 ¹⁰
S (kg.s ² /m)	2,663.10 ¹⁰

Tendo-se o valor do módulo de cisalhamento, o valor do Momento de Inércia foi calculado utilizando este parâmetro para fim de comparação com o Momento de Inércia inicial. Para este caso, o sistema foi composto de um fio de comprimento 0,2m e de um cilindro de aço. A equação genérica para se encontrar o Momento de Inércia é a equação (09). No estudo foi calculado a partir de cada componente do sistema utilizando a equação (11), que define o Momento de Inércia do cilindro, levando em conta sua massa e geometria. O valor obtido foi $I = 3,710.10^{-4} \text{ kg.m}^2$.

Através da equação (9) foi calculado o valor do Momento de Inércia a partir dos dados experimentais, obtendo-se o valor de $I = 3,908.10^{-4} \text{ kg.m}^2$.

Comparando estes dois dados, calculou-se uma discrepância de cerca de 5,34% entre os dois valores em relação ao valor do Momento de Inércia teórico.

A causa deste erro pode ser devido a falhas durante a execução do experimento, bem como o fato de que o período determinado para a oscilação do cilindro preso a um fio foi medido somente uma vez. O erro neste período pode ter sido propagado e refletido no Momento de Inércia experimental calculado. Por outro lado, este erro pode refletir uma não concordância entre o valor do módulo de cisalhamento calculado e o seu valor real.

Conclusões

Neste estudo foi empregado o método de regressão linear para análise do período de oscilação, experimentalmente calculado, e o Momento de Inércia de cada sistema, calculando-se o valor do módulo de torção (K) e módulo de cisalhamento (S). Os resultados mostraram boa eficiência com a comparação dos Momentos de Inércia, uma vez que os desvios se mantiveram nos intervalos previstos pelo cálculo de propagação de erro, empregando a equação (13). Dessa forma, o método apresentado pode ser utilizado como uma base no valor do módulo de cisalhamento.

Agradecimentos

À instituição de ensino (UNIOESTE), ao professor Dr. Fernando Rodolfo Espinoza Quiñones, aos técnicos do laboratório no qual foi realizado o experimento, aos nossos familiares, amigos e colegas.

Referências

Halliday, D.; Resnick, R.; e Walker, J. Fundamentos de Física. LTC-Editora, Rio de Janeiro, 4ª edição, 1996
Quiñones, F. R. E., Notas de aula – Física Geral e Experimental II, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2008
Macedo, H. T.; Macedo, C. A., Revista Brasileira de Ensino de Física, Junho, 2002, no. 2, vol. 24.