

ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO ESPECTRAL PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA.

Leonardo S. Guillermo Felipe, e-mail: leogui27@yahoo.com.br.

Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Centro de Engenharias e Ciências Exatas – Toledo – PR.

Palavras-chave: colocação, erro de aproximação, desigualdade de Gronwall.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é discutir o método numérico espectral de colocação-Legendre para as equações integrais de tipo Volterra. Quando as funções núcleo e forçante são suficientemente suaves, a análise do erro pelo método proposto mostra que a estimativa do erro numérico decresce exponencialmente. Testes numéricos foram realizados, os quais confirmam os resultados teóricos sobre a taxa exponencial de convergência do método numérico apresentado neste trabalho.

Introdução:

Dada a equação integral de Volterra de segunda espécie:

$$u(x) + \int_a^x K(x,s)u(s) ds = g(x), \quad x \in [a,b] \quad (1)$$

sendo $u(s)$ a incógnita, k e g as funções núcleo e forçante, respectivamente.

Na literatura existem vários métodos numéricos para aproximar a solução da equação integral (1), tais como, o método de Galerkin, colocação, integração produto, ver por exemplo [Brunner, Houwen, 1986]. No entanto, poucos são os trabalhos que discutem sobre a aproximação espectral para a solução da equação integral (1).

Os métodos espectrais podem ser considerados como um subconjunto do método dos elementos finitos nos quais as funções base são definidas globalmente, em oposição a abordagem utilizada no método dos elementos finitos, onde estas funções são válidas dentro do elemento, e nulas fora deles.

As principais aplicações dos métodos espectrais concentram-se na área de dinâmica dos fluídos, com ênfase na solução de problemas que envolvem turbulência e transição, previsão do tempo, aerodinâmica e dinâmica oceanográfica [Boyd, 2000]. Métodos numéricos de colocação e métodos do tipo integração produto para resolver equações integrais de Volterra multidimensional foram analisados por [Brunner, Tang, 1989] e [Mc Kee, Tang, Diogo, 2000].

[Elnagar, Kazemi, 1996] utilizou o método espectral-Chebyshev para aproximar a equação integral de Volterra-Hammerstein e [Fujiwara, 2006], analisou numericamente o método espectral-Chebyshev para a solução da equação integral de primeira espécie de tipo Fredholm. Porém, não existe uma análise teórica rigorosa para justificar a ordem de convergência do método espectral.

É conhecido que a equação integral de tipo Fredholm comporta-se como um problema de valor na fronteira, ver por exemplo [Delves, Mohammed, 1985]; conseqüentemente, métodos numéricos eficientes (como o método espectral) são utilizados para aproximar a solução para este tipo de problema. Não obstante, a equação integral de Volterra (1) comporta-se como um problema de valor inicial. Portanto, não é comum aplicar a aproximação espectral para as equações integrais de tipo Volterra. A razão disto é que a equação (1) é uma equação local, entanto que o método espectral utiliza funções bases globais. A maior dificuldade em aplicar o método espectral para a equação (1) é a implementação do método de modo que a exatidão da solução numérica possa, eventualmente, ser atingida.

O objetivo deste trabalho é desenvolver e aplicar o método numérico espectral para a solução da equação integral de Volterra (1). Além disso, é realizada a análise rigorosa do erro de aproximação, o qual constituirá o suporte teórico para justificar a taxa de convergência espectral para a equação integral (1). Testes numéricos são apresentados, os quais confirmam os resultados teóricos obtidos neste trabalho.

O Método de Colocação-Legendre.

Seja,

$$u(x) + \int_{-1}^x K(x,s)u(s)ds = g(x), \quad x \in [-1,1] \quad (2)$$

é equação integral linear de Volterra de segunda espécie.

Sem perda de generalidade, assume-se que a solução da equação (2) está no intervalo $[-1,1]$.

Como pontos de colocação podem-se considerar o conjunto de $N+1$ pontos x_i , $0 \leq i \leq N$, de Gauss-Legendre ou Gauss-Radau ou Gauss-Lobatto. Logo, para $x = x_i$ a equação (2) fica,

$$u(x_i) + \int_{-1}^{x_i} K(x_i,s)u(s)ds = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (3)$$

A maior dificuldade em obter uma boa precisão de ordem elevada é calcular os termos da integral em (3). Em particular, para valores pequenos de x_i , existe pouca informação disponível para $u(s)$. Para superar esta dificuldade, considera-se o intervalo $[-1, 1]$ em lugar de $[-1, x_i]$, e logo são usadas as regras de quadratura para aproximar as integrais mencionadas. Para este propósito, primeiramente, é considerada uma transformação linear da forma seguinte,

$$s(x, \theta) = \frac{1+x}{2} \theta + \frac{x-1}{2}, \quad -1 \leq \theta \leq 1. \quad (4)$$

Logo, (3) pode-se escrever como,

$$u(x_i) + \int_{-1}^1 \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta)) u(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (5)$$

sendo,

$$\bar{K}(x_i, s(x_i, \theta)) = \frac{1+x_i}{2} K(x_i, s(x_i, \theta)). \quad (6)$$

Usando os $N+1$ pontos de Gauss para a fórmula de quadratura com $\{w_k\}$ sendo os pesos de Legendre, resulta,

$$u(x_i) + \sum_{j=0}^N \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta_j)) u(s(x_i, \theta_j)) w_j = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (7)$$

em que o conjunto $\{\theta_j\}$, $0 \leq j \leq N$ coincide com os pontos de colocação $\{x_j\}$.

Agora $u(s(x_i, \theta_j))$ é representado usando u_i para $0 \leq i \leq N$; isto é, a representação será em todos os nós. Assim, u será desenvolvido mediante os polinômios de interpolação de Lagrange,

$$u(\sigma) \approx \sum_{j=0}^N u_j F_j(\sigma),$$

onde F_j é a j -ésima função de Lagrange.

Logo, a equação (7) fica,

$$u_i + \sum_{j=0}^N u_j \left[\sum_{j=0}^N \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta_j)) F_j(s(x_i, \theta_j)) w_j \right] = g(x_i), \quad 0 \leq i \leq N. \quad (8)$$

Pode-se observar em (8) que para aproximar $u(x_i)$, requiere-se da informação completa da solução de $\{u(x_j)\}$, $0 \leq j \leq i$. Aqui, $-1 \leq s(x_i, \theta_j) \leq x_i$. Isto não é o mesmo que o método de colocação por integração produto; que, neste caso, é preciso da informação parcial-local de $\{u(x_j)\}$ para $i \leq j \leq 0$ e $\{K(x_i, \beta_j)\}$ onde $-1 \leq \beta_j \leq x_i$ são os pontos de colocação. Aqui radica a importância deste trabalho; na próxima seção discutiremos a obtenção da taxa de aproximação espectral em lugar de uma ordem de aproximação algébrica para o esquema proposto (8).

Implementação do algoritmo de colocação espectral. Se denotarmos por $U_N = [u_0, u_1, \dots, u_N]^T$ e $g_N = [g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_N)]^T$, resulta uma equação matricial da forma,

$$U_N + AU_N = F_N \quad (9)$$

onde a matriz A é dada por,

$$A_{ij} = \sum_{p=0}^N \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta_p)) F_j(s(x_i, \theta_p)) w_p .$$

Agora, será discutida uma aproximação para $F_j(s(x_i, \theta_p))$. A idéia é expressar $F_j(s)$ em termos das funções de Legendre,

$$F_j(s) = \sum_{p=0}^N \alpha_{p,j} L_p(s) \quad (10)$$

onde $\alpha_{p,j}$ podem ser encontrados em [Canuto, Hussaini, 2006],

$$\alpha_{p,j} = \frac{1}{\gamma_p} \sum_{i=0}^N F_j(x_i) L_p(x_i) w_i = L_p(x_j) / \gamma_p \quad (11)$$

sendo,

$$\gamma_p = \sum_{i=0}^N L_p^2(x_i) w_i = \left(p + \frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ para } p < N \quad (12)$$

e $\gamma_N = \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ para as fórmulas de Gauss e Gauss-Radau, e $\gamma_N = 2/N$ para a fórmula de Gauss-Lobato.

De (10) e (11) segue que,

$$F_j(s) = \sum_{p=0}^N L_p(x_j) L_p(s) / \gamma_p \quad (13)$$

e junto com as fórmulas de recorrência para $L_p(s)$, podem ser usadas para avaliar $F_j(s(x_i, \theta_p))$.

Análise de convergência

Nesta seção será discutida a convergência do método numérico para as equações integrais de Volterra (2).

O objetivo é demonstrar que o método numérico proposto tem taxa de convergência exponencial.

Lema1.([Canuto, Hussaini, 2006] Erro de integração na quadratura de Gauss).

Suponha que os pontos da fórmula de quadratura estão relacionados aos $N+1$ pontos de Gauss ou de Gauss-Radau ou Gauss-Lobato; com os pesos de Legendre usados para integrar o produto $u\phi$, onde $u \in H^m(I)$, $I = (-1,1)$ para algum $m \geq 1$ e $\phi \in \mathcal{P}_N$.

Então existe uma constante C independente de N tal que,

$$\left| \int_{-1}^1 u(x) \phi(x) dx - (u, \phi)_N \right| \leq CN^{-m} |u|_{H^m, N(I)} \|\phi\|_{L^2(I)} \quad (14)$$

sendo,

$$\|u\|_{\bar{H}^m, N(I)} = \left(\sum_{j=\min(m, N)}^m \|u^{(j)}\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2}, \quad (15)$$

$$e(u, \phi)_N = \sum_{j=0}^N w_j u(x_j) \phi(x_j). \quad (16)$$

Lema 2. ([Canuto, Hussaini, 2006] Estimativa para o erro de interpolação).

Suponha que $u \in H^m(I)$ e denotemos por $I_N u$ os polinômios de interpolação associados com os $N+1$ pontos $\{x_j\}$ de Gauss ou Gauss-Radau ou Gauss-Lobato; isto é,

$$I_N u = \sum_{i=0}^N u(x_i) F_i(x) \quad (17)$$

Então,

$$\|u - I_N u\|_{L^2(I)} \leq CN^{-m} \|u\|_{\bar{H}^m, N(I)} \quad (18)$$

Lema 3. ([Qu, Wong, 1988], Constante de Lebesgue para séries de Legendre).

Assumamos que $F_j(x)$ é o N -ésimo polinômio de interpolação de Lagrange associado com os pontos de Gauss ou Gauss-Radau ou Gauss-Lobatto. Então,

$$\max_{x \in (-1, 1)} \sum_{j=0}^N |F_j(x)| = 1 + \Lambda_N, \quad (19)$$

onde,

$$\Lambda_N = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi}} N^{1/2} + B_0 + \Theta(N^{-1/2}),$$

onde B_0 é uma constante limitada.

Lema 4. ([Mc Kee, 1982], Desigualdade de Gronwall).

Se a função integrável não negativa $E(t)$ satisfaz,

$$E(t) \leq C_1 \int_{-1}^t E(s) ds + G(t), \quad -1 < t \leq 1 \quad (20)$$

sendo $G(t)$ é uma função integrável; então,

$$\|E\|_{L^\infty(I)} \leq C \|G\|_{L^1(I)}. \quad (21)$$

Teorema 1. Seja u a solução exata da equação integral de Volterra (2), e

$$\text{suponha que } U(x) = \sum_{j=0}^N u_j F_j(x), \quad (22)$$

onde u_j é dado por (8) e $F_j(x)$ é a j -ésima função básica de Lagrange associada com os pontos de Gauss $\{x_j\}$ para $0 \leq j \leq N$. Se $u \in H^m(I)$, então para $m \geq 1$, tem-se que,

$$\|u - U\|_{L^\infty(I)} \leq CN^{1/2-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \|u\|_{L^2(I)} + CN^{-m} |u|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \quad (23)$$

para N suficientemente grande, onde $s(x_i, \theta)$ é definido por (6) e C é uma constante que independe de N .

Prova.

Com a notação de (16), tem-se,

$$\left(\bar{K}(x, s), \phi(s) \right)_{(N,s)} = \sum_{j=0}^N \bar{K}(x, s(x, \theta_j)) \phi(s(x, \theta_j)) w_j.$$

Logo, o esquema numérico (2.7) pode-se escrever como,

$$u_i + \left(\bar{K}(x_i, s), U(s) \right)_{(N,s)} = g(x_i) \quad (24)$$

de onde resulta,

$$u_i + \int_{-1}^1 \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta)) U(s(x_i, \theta)) d\theta = g(x_i) + I_{i,1}, \text{ para } 1 \leq i \leq N \quad (25)$$

sendo,

$$I_{i,1} = \int_{-1}^1 \bar{K}(x_i, s(x_i, \theta)) U(s(x_i, \theta)) d\theta - (K(x_i, s), U(s))_{(N,s)}$$

De (15), (3) e (5) segue que,

$$u_i + \int_{-1}^{x_i} K(x_i, s) U(s) ds = g(x_i) + I_{i,1} \text{ para } 1 \leq i \leq N \quad (26)$$

Usando o Lema 1 obtem-se,

$$|I_{i,1}| \leq CN^{-m} \left| s \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \|U\|_{L^2(I)} \quad (27)$$

Multiplicando por $F_j(x)$ em ambos os lados de (26) e somando de 0 até N , obtemos,

$$U(x) + I_N \left(\int_{-1}^x K(x, s) u(s) ds \right) + I_N \left(\int_{-1}^x K(x, s) \varepsilon(s) ds \right) = I_N(g) + J_1(x), \quad (28)$$

onde U é definido por (22), o operador de interpolação I_N é definida por (17), ε denota a função erro; isto é,

$$\varepsilon(x) = U(x) - u(x), \text{ para } x \in [-1,1]$$

e a função $J_1(x)$ é definida por,

$$J_1(x) = \sum_{j=0}^N I_{i,1} F_j(x).$$

De (28) e (2) segue que,

$$U(x) + I_N(g - u) + I_N \left(\int_{-1}^x K(x, s) \mathcal{E}(s) ds \right) = I_N(g) + J_1(x),$$

de onde obtemos,

$$\mathcal{E}(x) + (u - I_N u)(x) + I_N \left(\int_{-1}^x K(x, s) \mathcal{E}(s) ds \right) = J_1(x).$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}(x) + \int_{-1}^x K(x, s) \mathcal{E}(s) ds = J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) \quad (29)$$

sendo,

$$J_2(x) = I_N u(x) - u(x) \text{ e}$$

$$J_3(x) = \int_{-1}^x K(x, s) \mathcal{E}(s) ds - I_N \left(\int_{-1}^x K(x, s) \mathcal{E}(s) ds \right).$$

Da desigualdade de Gronwall (Lema 4) segue que,

$$\|\mathcal{E}\|_{L^\infty(I)} \leq C \left(\|J_1\|_{L^1(I)} + \|J_2\|_{L^1(I)} + \|J_3\|_{L^1(I)} \right). \quad (30)$$

Usando (27) e o Lema 3, obtemos,

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{L^1(I)} &\leq C \|J_1\|_{L^2(I)} \\ &\leq CN^{-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \|U\|_{L^2(I)} \max_{x \in I} \sum_{j=0}^N |F_j(x)| \\ &\leq CN^{1/2-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \|U\|_{L^2(I)} \\ &\leq CN^{1/2-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \left(\|\mathcal{E}\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^2(I)} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

Usando o erro limitante para os polinômios de interpolação (Lema, 2), resulta,

$$\|J_2\|_{L^1(I)} \leq C \|J_2\|_{L^2(I)} \leq CN^{-m} \|u\|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \quad (32)$$

e

$$\begin{aligned} \|J_3\|_{L^1(I)} &\leq C \|J_3\|_{L^2(I)} \\ &\leq CN^{-1} \left\| K(x, x) \mathcal{E}(x) + \int_{-1}^x K_x(x, s) \mathcal{E}(s) ds \right\|_{L^2(I)} \\ &\leq CN^{-1} \|\mathcal{E}\|_{L^\infty(I)} \end{aligned} \quad (33)$$

Da estimativa obtida acima junto com (30), resulta,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}(x)\|_{L^\infty(I)} &\leq CN^{1/2-m} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \bar{K}(x_i, s(x_i, \cdot)) \right|_{\bar{H}_{m,N}(I)} \left(\|\mathcal{E}\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^2(I)} \right) + \\ &\quad + CN^{-m} \|u\|_{\bar{H}_{m,N}(I)} + CN^{-1} \|\mathcal{E}\|_{L^\infty(I)} \end{aligned} \quad (34)$$

que leva a (23), sempre que N seja suficientemente grande. Isto completa a prova do Teorema.

Resultados numéricos

Sem perda de generalidade, são considerados os pontos de Legendre-Gauss-Lobatto (isto é, os zeros de $L_{N+1}(x)$) como sendo os pontos de colocação. Para estes pontos, os pesos correspondentes são,

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[L'_{N+1}(x_j)]^2}, \quad 0 \leq j \leq N$$

Exemplo 1. Este exemplo está relacionado com a equação integral de Volterra de segunda espécie unidimensional (2), sendo,

$$K(x, s) = e^{-xs}, \quad g(x) = e^{4x} + \frac{1}{x+4} (e^{x(x+4)} - e^{-(x+4)})$$

A solução exata correspondente é dada por $u(x) = e^{4x}$.

Para este exemplo foi usado o esquema numérico (8). Os erros numéricos para vários valores de N são mostrados na Tabela 1 e Figura 1. Observa-se a convergência espectral esperada.

Tabela 1. Erros máximos para a equação integral linear unidimensional do Exemplo 1

N	Erro
6	3.66 E-01
8	1.88 E-02
10	6.57 E-04
12	1.65 E-05
14	3.11 E-07
16	4.57 E-09
18	5.37 E-11
20	5.19 E-13
22	5.68 E-14
24	4.26 E-14

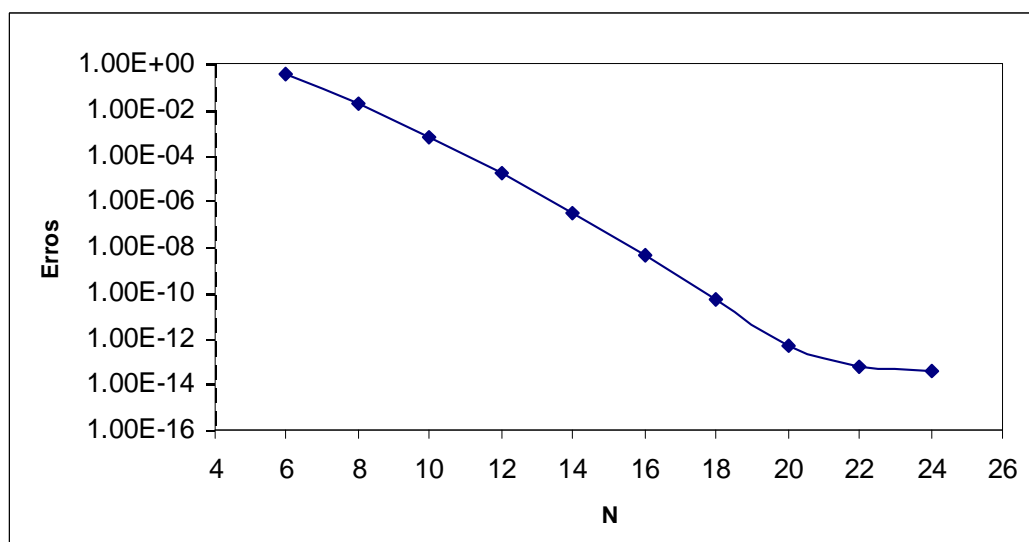


Figura 1, Erros máximos para a equação integral linear unidimensional do exemplo 1.

Conclusões

Neste trabalho foi discutido um método numérico para a equação integral de Volterra baseado no método espectral. A contribuição mais importante deste trabalho é ter demonstrado de maneira rigorosa que os erros por aproximação espectral caem exponencialmente. Mais especificamente, foi provado que se a função núcleo e a solução da equação integral de Volterra são funções suaves, então os erros de aproximação, pelo método espectral, tem convergência exponencial; o qual, teoricamente, é garantido para este tipo de aproximação, [Boyd, 2000].

Este trabalho é um dos poucos que justifica teoricamente a taxa de convergência exponencial para equações integrais de Volterra. As ferramentas usadas para estabelecer as estimativas do erro são do tipo usadas em regras de quadratura para funções de interpolação.

Conclui-se que a taxa de convergência estabelecido no Teorema 1 é $O(N^{1/2-m})$ conforme dado em (23).

Referências

- Boyd, J.P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2000.
- Brunner, H.; Van der Houwen, P.J. *The Numerical Solution of Volterra Equations*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- Brunner, H.; Kauthen, J.P. The numerical solution of two-dimensional Volterra Integral Equation. *IMA J. Numer. Anal.*, 1989, 9, 45-59.
- Brunner, H. ; Tang, T. Polynomial spline collocation methods for the nonlinear Basset equation. *Comput. Math. Appl.*, 1989, 18, 449-457.
- Canuto, C.; Hussaini, M.Y.; Quarteroni, A. Zang, T.A. *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag, 2006.

- Delves, L.M.; Mahommed, J.L. *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge University Press, 1985.
- Elnagar, G.N.; Kazemi, M. Chebyshev spectral solution of nonlinear Volterra-Hammerstein integral equation. *J. Comput. Appl. Math.* 1996, 76, 147-158.
- Fujiwara, H. *High-accurate numerical method for integral equations of the first kind under multiple-precision arithmetic*. Preprint, RIMS, Kyoto University, 2006.
- McKee, S.; Tang, T. ; Diogo, T. An Euler-type method for two-dimensional Volterra Integral Equations of the first kind. *IMA J. Numer. Anal.* 200, 20, 423-440.
- McKee, S. Generalised discrete Gronwall lemmas. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1982, 62, 429-434.
- Qu, C.K.; Wong, R. Szego conjecture on Lebesgue constants for Legendre series. *Pacific, J. Math.*, 1988, 157-188.