ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE COLOCAÇÃO-CHEBYSHEV PARA EQUAÇÕES INTEGRAIS DE VOLTERRA COM NÚCLEO FRACAMENTE SINGULAR

Leonardo S. Guillermo Felipe, e-mail: leogui27@yahoo.com.br.

Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Centro de Engenharias e Ciências Exatas – Toledo – PR.

Palavras-chave: método numérico, quadratura gaussiana, convergência.

Resumo:

O objetivo deste trabalho é desenvolver e discutir a convergência do método numérico de colocação-Chebyshev para as equações integrais de tipo Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular. Esta equação é transformada numa outra equação integral equivalente, de modo que esta última tem melhores propriedades de regularidade. Na equação integral transformada, a integral será aproximada por fórmulas de quadratura gaussiana nos pontos de colocação Chebyshev. A análise de convergência para este método numérico é baseado na constante de Lebesgue para os polinômios de interpolação de Lagrange e a teoria da aproximação dos polinômios ortogonais. A taxa de convergência para o método proposto será estabelecida para as normas L^∞ e L^2. Testes numéricos foram realizados, os quais confirmam os resultados teóricos sobre a taxa de convergência exponencial.

Introdução.

Neste trabalho é discutido o método de colocação-Chebyshev para aproximar a solução da equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular,

$$y(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-1/2} K(t,s) y(s) ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

sendo $y(t)$ a função desconhecida e cujos valores devem ser determinados no intervalo $0 \le t \le T < \infty$. As funções $g(t)$ e $K(t,s)$ são dadas e suficientemente suaves.

Para qualquer inteiro positivo m, se as funções g e K são m-vezes continuamente diferenciáveis, então existe uma função $Z = Z(t,v)$ m-vezes continuamente diferenciáveis de modo que a solução de (1) pode ser escrita como $y(t) = Z(t,\sqrt{t})$, ver por exemplo [Miller, Feldstein,1971], [Brunner, Houwen, 1986]. Isto significa que próximo de $t = 0$, a derivada primeira da solução $y(t)$ tem um comportamento da mesma forma que $y'(t) \approx t^{-1/2}$.[Miller, Feldstein,1971]. Vários métodos de tipo colocação para a equação (1) tem sido propostos para obter convergência de ordem elevada, ver por exemplo [Brunner, 1985], [Diogo, Mc Kee, Tang, 1994] e [Tang, 1992]. O método de passo múltiplo para equação (1) foi discutido por [Lubich, 1985].

O comportamento singular da solução exata da equação integral (1) faz com que os métodos espectrais não sejam de aplicação imediata. Especificamente, para qualquer inteiro positivo m, tem-se que $y^{(m)}(t) \approx t^{\frac{1}{2}-m}$, o que significa que $y \notin H_w^m(0,T)$, sendo H_w^m o espaço de Sobolev associado com os pesos w. Para amenizar esta dificuldade, em primeiro lugar pode-se aplicar a transformação,

$$\tilde{y}(t) = t^{1/2}[y(t) - y(0)] = t^{1/2}[y(t) - g(0)], \tag{2}$$

logo, a equação (1) fica,

$$\tilde{y}(t) = \tilde{g}(t) + t^{1/2} \int_0^t s^{-1/2} (t-s)^{-1/2} K(t,s)\, \tilde{y}(s)\, ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

sendo,

$$\tilde{g}(t) = t^{1/2}[g(t) - g(0)] + t^{1/2} g(0) \int_0^t (t-s)^{-1/2} K(t,s)\, ds. \tag{4}$$

Observa-se que a solução de (3) é uma função regular,

$$\tilde{y}(t) \in C^m([0,T]). \tag{5}$$

Com o propósito de aplicar a teoria dos polinômios ortogonais, é preciso fazer a seguinte mudança de variáveis na equação (3),

$$t = \frac{T}{2}(1+x) \Rightarrow x = \frac{2}{T}t - 1 \tag{6}$$

Logo, a equação (3) pode-se escrever como,

$$u(x) = f(x) + \left[\frac{T}{2}(1+x)\right]^{1/2} \int_0^{-1/2} s^{-1/2} \left(\frac{T}{2}(1+x) - s\right)^{-1/2} K\left(\frac{T}{2}(1+x), s\right) \tilde{y}(s)\, ds \tag{7}$$

sendo,

$$u(x) = \tilde{y}\left(\frac{T}{2}(1+x)\right) \quad \text{e} \quad f(x) = \tilde{g}\left(\frac{T}{2}(1+x)\right). \tag{8}$$

Agora, é conveniente mudar o intervalo $\left[0, \frac{T}{2}(1+x)\right]$ para $[-1, x]$ fazendo a transformação,

$$s = \frac{T}{2}(1+\tau), \quad \tau \in [-1, x]. \tag{9}$$

Desse modo, a equação (7) fica,

$$u(x) = f(x) + \left[\frac{T}{2}(1+x)\right]^{1/2} \int_{-1}^{x} (1+\tau)^{-1/2} (x-\tau)^{-1/2} \tilde{K}(x,\tau) u(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

sendo, $x \in [-1,1]$ e $\tilde{K}(x,\tau) = K\left(\frac{T}{2}(1+x), \frac{T}{2}(1+\tau)\right)$.

Poucos são os trabalhos que discutem sobre a aproximação espectral para a equação (1). Assim, [Elnagar, Kazemi, 1996] tem usado o método espectral-Chebyshev para aproximar a solução da equação integral de Hammerstein e [Fujiwara, 2006] tem discutido o método de colocação-Chebyshev para a solução da equação integral de primeira espécie de tipo Fredholm. Os trabalhos acima mencionados não apresentam a análise teórico que justifique a elevada ordem de convergência do método espectral.

O objetivo deste trabalho é desenvolver e aplicar o método de colocação-Chebyshev para aproximar a solução da equação integral (10). Além disso, é analisado o erro de aproximação, o qual constitui o suporte teórico para justificar a taxa de convergência do método numérico para a solução da equação integral (10). Testes numéricos são realizados, os quais confirmam os resultados teóricos obtidos neste trabalho.

O Método de Colocação-Chebyshev

Seja $w(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$ a função peso. Em [Canuto, Hussaini, Quarteroni, Zang, 2006] encontra-se que o conjunto de polinômios de Chebyshev $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ formam um sistema ortogonal completo $L_w^2(-1,1)$, onde $L_w^2(-1,1)$ é o espaço de funções peso definido por,

$$L_w^2(-1,1) = \{v : v \text{ é medível e } \|v\|_{L_w^2(-1,1)} < \infty\},$$

munido com a norma,

$$\|v\|_{L_w^2(-1,1)} = \left[\int_{-1}^{1} |v(x)|^2 w(x)dx\right]^{1/2},$$

e com produto interno,

$$(u,v)_w = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)w(x)dx, \quad \forall u,v \in L_w^2(-1,1).$$

Agora, os pontos de colocação $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, constituem o conjunto de $N+1$ pontos de Gauss-Chebyshev; e $\{w_i\}_{i=0}^{N}$ são os pesos correspondentes, sendo N é um inteiro positivo dado.

Seja $\wp_N$ o espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a N. Para qualquer $v \in C[-1,1]$, segundo [Canuto, Hussaini, Quarteroni, Zang, 2006] pode-se definir os polinômios de interpolação de Lagrange $I_N v \in \wp_N$, satisfazendo,

$$I_N v(x_i) = v(x_i), \quad 0 \le i \le N .$$

Isto pode-se escrever na forma,

$$I_N v(x) = \sum_{i=0}^{N} v(x_i) F_i(x),$$

onde, $\{F_i(x)\}$ são os polinômios de interpolação de Lagrange associados a $\{x_i\}_{i=0}^{N}$.

Impondo a condição de colocação na equação (10) nos pontos de colocação $\{x_i\}_{i=0}^N$ sobre $[-1,1]$, temos,

$$u(x_i) = f(x_i) + \left(\frac{T}{2}(1+x_i)\right)^{1/2} \int_{-1}^{x_i} (1+\tau)^{-1/2} \tilde{K}(x_i,\tau)u(\tau)d\tau, \quad 0 \le i \le N. \qquad (11)$$

Agora, para obter uma ordem de convergência elevada para a solução aproximada da equação (10), é usada fórmulas de quadratura gaussiana (na integral em (11)) relacionada com os pesos de Chebyhev. Baseado nesta idéia, transforma-se o intervalo de integração $[-1, x_i]$ para um intervalo fixo $[-1,1]$. Para este propósito, é feita a seguinte mudança de variáveis,

$$\tau = \tau_i(\theta) = \frac{1+x_i}{2}\theta + \frac{x_i - 1}{2}, \quad \theta \in [-1,1]. \qquad (12)$$

Deste modo, a integral em (11) fica,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{x_i} (1+\tau)^{-1/2} (x_i - \tau)^{-1/2} \tilde{K}(x_i,\tau)u(\tau)d\tau = \\ &= \int_{-1}^{1} (1-\theta^2)^{-1/2} \tilde{K}(x_i,\tau_i(\theta))u(\tau_i(\theta))d\theta \end{aligned} \qquad (13)$$

Logo, usando $N+1$ pontos para a fórmula de quadratura gaussiana em relação com os pesos de Chebyshev $\{w_i\}_{i=0}^N$, o termo integral em (13) pode ser aproximado por,

$$\int_{-1}^{1} (1-\theta^2)^{-1/2} \tilde{K}(x_i,\tau_i(\theta))u(\tau_i(\theta))d\theta \approx \sum_{k=0}^{N} \tilde{K}(x_i,\tau_i(\theta_k))u(\tau_i(\theta_k))w_k, \qquad (14)$$

onde o conjunto $\{\theta_k\}_{k=0}^N$ coincide com os pontos de colocação $\{x_i\}_{i=0}^N$ sobre $[-1,1]$.

Agora, se u_i, $0 \le i \le N$, indica o valor aproximado de $u(x_i)$, então pode-se escrever,

$$u^N(x) = \sum_{j=0}^{N} u_j F_j(x) \qquad (15)$$

para aproximar a função $u(x)$; isto é,

$$u(x_i) \approx u_i, \quad u(x) \approx u^N(x), \quad u(\tau_i(\theta_k)) \approx \sum_{j=0}^{N} u_j F_j(\tau_i(\theta_k)).$$

O Método de colocação-Chebyshev consiste em procurar $u^N(x)$ tal que $\{u_i\}_{i=0}^N$ satisfazem as seguintes equações de colocação,

$$u_i = f(x_i) + \left(\frac{T}{2}(1+x_i\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{N} u_j \left(\sum_{k=0}^{N} \tilde{K}(x_i,\tau_i(\theta_k))F_j(\tau_i(\theta_k))w_k\right), \quad 1 \le i \le N. \qquad (16)$$

Define-se a função erro por,

$$e(x) := (u - u^N)(x), \quad x \in [-1,1]. \qquad (17)$$

De (2) e (8) segue que,

$$y(t) = g(0) + \left(\frac{T}{2}(1+x)\right)^{-1/2} u(x). \qquad (18)$$

Consequentemente, a solução aproximada para a equação (1) é dada por,

$$y^N(t) = g(0) + \left(\frac{T}{2}(1+x)\right)^{-1/2} u^N(x)\,. \tag{19}$$

Logo, a função erro correspondente é definida por,

$$\varepsilon(t) := (y - y^N)(t) = \left(\frac{T}{2}(1+x)\right)^{-1/2} e(x) = t^{-1/2} e(x). \tag{20}$$

Resultados e Lemas Preliminares

Para m inteiro não negativo, definimos,

$$H_w^m(-1,1) := \{v : \partial_x^k v \in L_w^2(-1,1),\ \ 0 \le k \le m\}\,, \tag{21}$$

com a norma,

$$\|v\|_{H_w^m(-1,1)} = \left(\sum_{k=0}^{m} \left|\partial_x^k v\right|^2_{L_w^2(-1,1)}\right)^{1/2}.$$

Agora, a projeção ortogonal $P_N : L_w^2(-1,1) \to \wp_N$, é uma aplicação tal que, $\forall\ v \in L_w^2(-1,1)$,

$$(v - P_N v, \phi)_w = 0, \quad \forall \phi \in \wp_N\,.$$

As seguintes estimativas são encontradas em [Canuto, Hussaini, Quarteroni, Zang, 2006],

$$\|v - P_N v\|_{L_w^2(-1,1)} \le C N^{-m} |v|_{H_w^{m;N}(-1,1)}\,, \tag{22}$$

$$\|v - I_N v\|_{L_w^2(-1,1)} \le C N^{-m} |v|_{H_w^{m;N}(-1,1)}\,, \tag{23}$$

$$\|v - P_N v\|_{L^\infty(-1,1)} \le C N^{(1/2)-m} |v|_{H_w^{m;N}(-1,1)}\,, \tag{24}$$

para qualquer $v \in H_w^m(-1,1)$, onde C é uma constante positiva que independe de N.

A seguir, definimos o produto interno discreto,

$$(u,v)_N = \sum_{j=0}^{N} u(x_j) v(x_j) w_j\,, \tag{25}$$

para quaisquer funções continuas u,v em $[-1,1]$.

De (22) e (23) resulta uma estimativa para o erro de integração produzido pela fórmula de quadratura gaussiana relacionado com os pesos de Chebyshev,

Lema 1. Se $v \in H_w^m(-1,1)$ para algum $m \ge 1$ e $\phi \in \wp_N$, então,

$$\left|(v,\phi)_w - (v,\phi)_N\right| \le C N^{-m} |v|_{H_w^{m;N}(-1,1)} \|\phi\|_{L_w^2(-1,1)}\,. \tag{26}$$

De [Mastroianni, Occorsio, 2001] pode-se obter o seguinte resultado sobre a constante de Lebesgue para a interpolação de Lagrange basedo nos zeros dos polinômios de Chebyshev, Lema 2. Assuma que $\{F_j(x)\}_{j=0}^{N}$ são os polinômios de interpolação de Lagrange com $\{x_j\}$ sendo os pontos de Gauss-Chebyshev. Então,

$$\|I_N\|_\infty := \max_{x\in(-1,1)} \sum_{j=0}^{N} |F_j(x)| = O(\log N)\,. \tag{27}$$

Para fazer a análise de convergência é conveniente aplicar o lema de Gronwall.
Dizemos que a função $v = v(t)$ é localmente integrável no intervalo $[0,T]$, se para cada $t \in [0,T]$, a sua integral de Lebesgue $\int_0^t v(s)ds$ é finita.

Lema 3. Assuma que a função não negativa e localmente integrável v satisfaz,

$$v(t) \le b(t) + c(t)\int_0^t s^{-1/2}(t-s)^{-1/2} v(s)ds,\ \ t \in [0,T]\,,$$

onde $b(t) \ge 0, c(t) \ge 0$ são limitadas superiormente. Então existe uma constante C tal que,

$$v(t) \le b(t) + C\int_0^t s^{-1/2}(t-s)^{-1/2} b(s)ds,\ \ t \in [0,T]\,.$$

Doravante, o espaço $C^{r,\kappa}([0,T])$, com $r \ge 0$ e $\kappa \in [0,1]$, denotará o espaço de funções cuja r-ésima derivada é continua segundo Holder com expoente κ, munido com a norma usual $\|.\|_{r,\kappa}$. Para $\kappa = 0,\ C^{r,0}([0,T])$ denota o espaço de funções com r derivadas continuas em $[0,T]$, que também é denotado por $C^r([0,T])$ e com norma $\|.\|_r$.

Fazendo uso de um resultado de [Ragozin, 1970], que estabelece; para cada inteiro não negativo r e $\kappa \in [0,1]$, existe uma constante $C_{r,\kappa} > 0$ tal que para qualquer função $v \in C^{r,\kappa}([0,T])$, existe uma função polinomial $\Psi_N v \in \wp_N$ tal que,

$$\|v - \Psi_N v\|_\infty \le C_{r,\kappa} N^{-(r+\kappa)} \|v\|_{r,\kappa}\,, \tag{28}$$

onde $\|.\|_\infty$ é a norma no espaço $L^\infty(0,T)$, e quando a função $v \in C([0,T])$, denotaremos por $\|v\|_\infty = \|v\|_{C([0,T])}$. Na realidade, como é estabelecido em [Ragozin, 1970], Ψ_N é um operador linear de $C^{r,\kappa}([0,T])$ em $\wp_N$.

Por conveniência, define-se o operador integral fracamente singular M como,

$$(\mathrm{M}v)(t) = t^{1/2}\int_0^t s^{-1/2}(t-s)^{-1/2} K(t,s)v(s)ds, \quad t \in [0,T]\,. \tag{29}$$

Pode-se observar que M é um operador compacto de $C([0,T])$ em $C^{0,\kappa}([0,T])$ para qualquer $0 < \kappa < 1/2$.

Lema 4. Seja $\kappa \in (0,1/2)$ e M definido em (29). Então, para qualquer função $v(x) \in C([0,T])$, existe uma constante positiva C tal que,

$$\|\mathrm{M}v\|_{0,\kappa} \le C\|v\|_\infty . \tag{30}$$

Para estabelecer a estimativa em L^2 requere-se da desigualdade generalizada de Hardy [Gogatishvill,1999];

Lema 5. Para toda função medível $f \ge 0$, a desigualdade generalizada de Hardy,

$$\left(\int_a^b |(Tf)(x)|^q u(x)dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}$$

é verdade, se e somente se,

$$\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{1/p'} < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

para $1 < p \le q < \infty$. Aqui, T é um operador da forma,

$$(Tf)(x) = \int_a^x k(x,t) f(t)dt,$$

onde, $k(x,t)$ é o núcleo dado; u,v são funções peso e $-\infty \le a < b \le \infty$.

No Teorema 1 de [Nevai, 1984], pode-se obter a seguinte estimativa para interpolação de Lagrange associada com os pontos de colocação de Gauss-Chebyshev.

Lema 6. Para cada função limitada $v(x)$ existe uma constante C independente de v tal que,

$$\sup_N \left\|\sum_{j=0}^N v(x_j) F_j(x)\right\|_{L_w^2(-1,1)} \le C\|v\|_\infty,$$

onde, $F_j(x)$ é o polinômio de interpolação de Lagrange associado com os pontos de colocação de Chebyshev $\{x_j\}_{j=0}^N$.

Análise de Convergência

O objetivo desta seção é analisar o esquema de aproximação (16). Inicialmente, é estabelecido a estimativa do erro no L^∞ do método de colocação-Chebyshev.

Teorema 1. Seja u a solução exata da equação integral de Volterra (10). Assuma que a solução aproximada u^N da forma (15) é dada pelo esquema de colocação espectral (16) com pontos de colocação Gauss-Chebyshev. Se as funções dadas $g(x)$ e $K(t,s)$ em (1) pertencem a $C^m(-1,1)$, então,

$$\|u - u^N\|_\infty \le CN^{(1/2)-m}|u|_{H_w^{m;N}(-1,1)} + CK^* N^{-m}\log N\|u\|_\infty , \tag{31}$$

para N suficientemente grande e,

$$K^* = \max_{0\le i\le N}\left|\tilde{K}(x_i,\tau_i(.))\right|_{H_w^{m;N}(-1,1)} . \qquad (32)$$

O objetivo seguinte é estabelecer a estimativa do erro em L^2.

Teorema 2. Sejam u e u^N conforme estabelecido no Teorema 1. Se as funções $g(x)$ e $K(t,s)$ em (1) pertencem a $C^m(-1,1)$, então,

$$\left\|u-u^N\right\|_{L_w^2(-1,1)} \le CN^{(1/2)-\kappa-m}|u|_{H_w^{m;N}(-1,1)} + CK^*N^{-m}\left(\|u\|_\infty + N^{-1/2}|u|_{H_w^1(-1,1)}\right), \qquad (33)$$

para N suficientemente grande e $\kappa\in(0,1/2)$, onde K^* é definido por (32).

Finalmente, é estabelecido o resultado principal deste trabalho, isto é, a estimativa do erro para a solução numérica da equação integral (1).

Teorema 3. Seja y a solução exata da equação integral (1). Assuma que a solução aproximada y^N é dada por (19) em conjunto com o esquema de colocação espectral (15)-(16) com os pontos de colocação de Gauss-Chebyshev. Se as funções $g(x)$ e $K(t,s)$ em (1) pertencem a $C^m(-1,1)$, então,

$$\max_{0\le i\le N}\left|y(t_i)-y^N(t_i)\right|_\infty \le CN^{(3/2)-m}|u|_{H_w^{m;N}(-1,1)} + CK^*N^{1-m}\log N\|u\|_\infty, \text{ e} \qquad (34)$$

$$\left\|y-y^N\right\|_{L_w^2(0,T)} \le CN^{(1/2)-\kappa-m}|u|_{H_w^{m;N}(-1,1)} + CK^*N^{-m}\left(\|u\|_\infty + N^{-1/2}|u|_{H_w^1(-1,1)}\right), \qquad (35)$$

para qualquer $\kappa\in(0,1/2)$, onde $u\in C^m[-1,1]$ é definido por (2) e (8), K^* é definido por (32) e,

$$\tilde{w}(t) := \sqrt{t} \qquad (36)$$

Prova.

Usando (20) temos, $(y-y^N)(t) = t^{-1/2}(u-u^N)(x)$.

Observa-se que,

$$\max_{1\le i\le N} t_i^{-1/2} \le \frac{T}{2}\max_{1\le i\le N}(1+x_i)^{-1/2} \le CN .$$

Isto junto com (31) conduzem a (34). A estimativa (35) é obtida usando (33) e o fato que,

$$\int_0^T \tilde{w}(t)(y-y^N)^2 dt = \sqrt{2/T}\int_{-1}^1 (1+x)^{-1/2}(u-u^N)^2\,dx$$
$$\le C\int_{-1}^1 (1+x^2)^{-1/2}(u-u^N)^2\,dx .$$

Isto completa a prova do Teorema 3. □

Resultados Numéricos

Seja $U_N = [u_0,....,u_N]^T$ e $F_N = [f(x_0),...., f(x_N)]^T$.
O esquema numérico (16) conduz a um sistema de equações da forma,

$$U_N = F_N + AU_N \ , \tag{37}$$

em que os elementos da matriz A são,

$$a_{ij=}[T/2(1+x_i)]^{1/2} \sum_{k=0}^{N} \tilde{K}(x_i, \tau_i(\theta_k)) F_j(\tau_i(\theta_k)) w_k \ .$$

No teste numérico foram usado os pontos de Gauss-Chebyshev,

$$x_i = \frac{\cos(2i+1)\pi}{2N+2} \ ,$$

associado com os pesos $w_i = \pi/(N+1)$.

Exemplo 1.

Considere a equação integral de Volterra da forma,

$$y(t) = g(t) - \int_0^t (t-s)^{-1/2} y(s)\, ds, \quad 0 \le t \le T \ , \tag{38}$$

com $g(t) = \pi sen(t/2) bessel\ j(0, t/2) + sen(t)/\sqrt{t}$,
sendo $bessel\ j(v,z)$ a função de Bessel definida por,

$$bessel\ j(v,z) = (z/2)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(v+k+1)} \ .$$

A equação integral (38) tem solução exata dada por,

$$y(t) = sen(t)/\sqrt{t}, \quad t \in [0,T] \ .$$

Claramente, $y(t)$ possui as propriedades apresentadas no inicio deste trabalho, isto é, $y^{/}(t) \approx t^{-1/2}$ próximo de $t = 0$.

A Tabela 1 e Figura 1 contém os erros da solução aproximada usando o método de colocação-Chebyshev proposto. Observar-se que a taxa de convergência espectral é atingida com $T = 8$.

Tabela 1. Exemplo 1 : erros L^{∞} e L_w^2 para $\tilde{y}(t)$.

N	Erros L^{∞}	Erros L_w^2
2	6,929E-001	7,780E-001
4	1,272E-001	1,657E-001
6	1,182E-002	1,629E-002
8	6,261E-004	9,099E-004
10	2,235E-005	3,284E-005
12	5,548E-007	8,304E-007
14	1,038E-008	1,555E-008
16	1,497E-010	2,245E-010

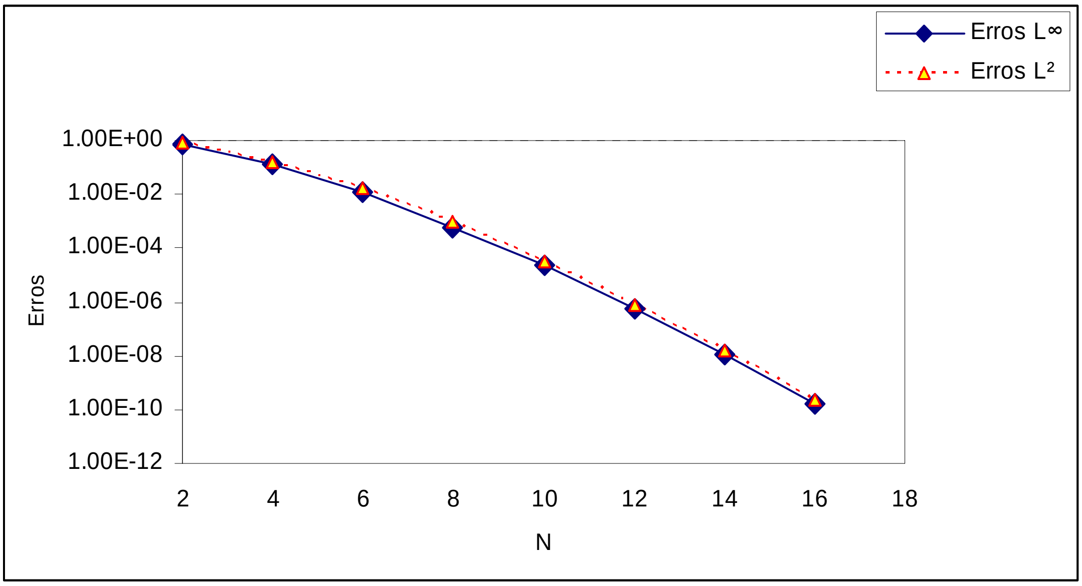

Figura 1. Exemplo 1 : erros L^{∞} e L_w^2 para $\tilde{y}(t)$.

Exemplo 2.

Considere a seguinte equação integral de Volterra de segunda espécie com núcleo fracamente singular,

$$y(t) = \int_0^t (t-s)^{-1/2}(-y^2(s))\,ds + g(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{39}$$

com $g(t) = \pi/2(1+\cos(t) bessel\ j(0,t)) + \cos(t)/t^{1/4}, \quad t \in [0,T]$.

A equação integral (39) tem solução exata dada por,

$$y(t) = \cos(t)/t^{1/4}, \quad 0 \le t \le T .$$

Na Tabela 2 e Figura 2 são mostrados os erros obtidos usando o método de Chebyshev para $T = 8$. Novamente, a taxa de convergência exponencial é atingida para este exemplo.

Tabela 2. Exemplo 2 : erros L^{∞} e L_w^2 para $\tilde{y}(t)$.

N	Erros L^{∞}	Erros L_w^2
2	3,801E-001	4,543E-001
4	2,767E-001	3,269E-002
6	3,960E-002	1,629E-002
8	3,038E-003	2,059E-003
10	1,469E-004	9,371E-005
12	9,998E-006	6,251E-006
14	1,814E-007	1,114E-007
16	3,519E-009	2,026E-009

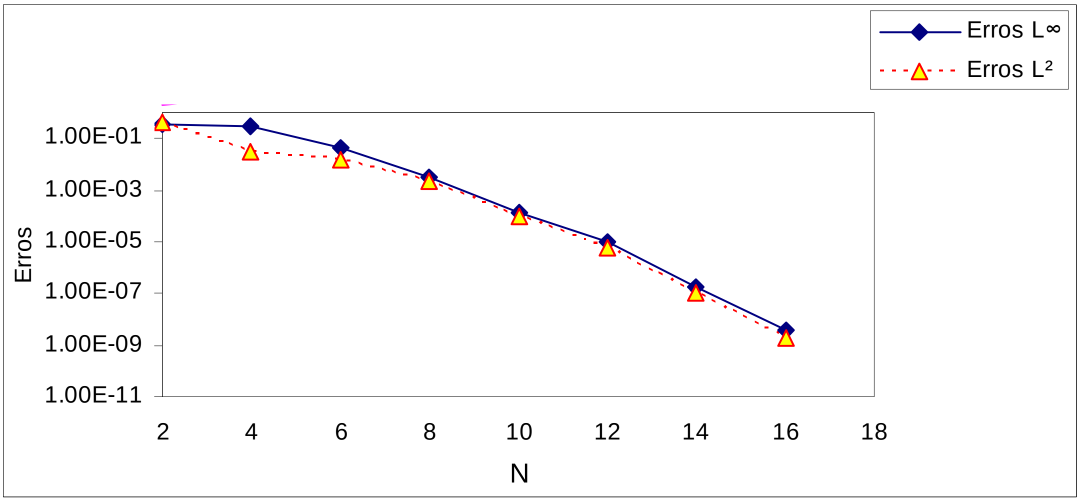

Figura 2. Exemplo 2 : erros L^{∞} e L_w^2 para $\tilde{y}(t)$.

Conclusões

Neste trabalho foi analisado o erro do método espectral de colocação-Chebyshev para equações integrais de Volterra com núcleo fracamente singular da forma $(t-s)^{-1/2}$. A derivada $y'(t)$ da solução desta equação comporta-se como $t^{-1/2}$ próximo da origem, o que constitui a razão para a diminuição da ordem de convergência global.

Para amenizar esta dificuldade, aplicou-se uma transformação de coordenadas na equação integral, de modo que a nova equação integral resultante tem solução com melhores condições de regularidade. Além disso, foi apresentado o esquema discretizado para a equação integral de Volterra resultante. Demonstrou-se que em L^{∞} e L^2 os erros caem exponencialmente. Estes resultados são confirmados pelos exemplos numéricos apresentados neste trabalho.

Referências

Brunner, H. The numerical solutions of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes. *Math. Comp*., 1985, 45, 417-437.

Brunner, H.; Houwen, P.J. *The Numerical Solution of Volterra Equations*. CWI Monographs 3. North-Holland, Amsterdam, 1986.

Canuto, C.; Hussaini, M.Y.; Quarteroni, A.; Zang, T.A. *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag, 2006.

Diogo, T.; McKee, S.; Tang,T.; Collocation methods for second-kind Volterra integral equations with weakly singular kernels. *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh*, 1994, 24 A, 199-210.

Elnagar, G.N.; Kazemi, M. Chebyshev spectral solution of nonlinear Volterra Hammerstein integral equations. *J. Comput. Appl. Math*., 1996, 76, 147-158.

Fujiwara, H. *High-accurate numerical method for integral equations of the first kind under multiple-precision arithmetic*. RIMS, Kyoto University, 2006.

Gogatishvill, A.; Lang, J. The generalized hardy operator with kernel and variable integral limits in Banach function spaces. *Journal of Inequalities and Applications.* 1999, 4 (1), 1-16.

Lubich, Ch. Fractional linear multi-step methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind. *Math. Comp*. 1985, 45, 463-469.

Mastroianni, G.; Occorsio, D. Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals: A survey. *J. Compt. Appl. Math*., 2001, 134, 325-341.

Miller, R.K.; Feldstein, A. Smoothness of solutions of Volterra integral equations with weakly singular kernels. *SIAM J. Math*.; 1971, 2, 242-258,

Nevai, P. Mean convergence of Lagrange interpolation. III, *Trans. Amer. Math. Soc*., 1984, 282, 669-698.

Ragozin, D.L. Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneus spaces. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1970, 150, 41-53.

Tang, T. Superconvergence of numerical solutions to weakly singular Volterra integro-differential equations. *Numer. Math*. 1992, 61, 373-382.