The Problem of Trisecting an Angle

Certain angles can be trisected without difficulty. For example, a right angle can be trisected, since an angle of $30°$ can be constructed. However, there is no procedure, using only an unmarked straight edge and compasses, to construct one-third of an arbitrary angle. We shall prove this statement by showing that an angle of $60^{\underline{o}}$ cannot be trisected. For this purpose we make use of a formula developed in a previous chapter.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Let $3\theta = 60°$, then $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Also let $x = 2\cos\theta = 2\cos 20°$. Then

$$\frac{1}{2} = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

or

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

We can show that the cubic equation $x^3 - 3x - 1 = 0$ is irreducible. For, suppose $x = \frac{a}{b}$, where a an b are integers with no common factor greater than 1, $b \neq 0$. Then $\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a}{b} - 1 = 0$ and $a^3 - 3ab^2 = b^3$, or $b^3 = a(a^2 - 3b^2)$ and a divides b^3.

Since a and b have no common factor greater than 1, a must be 1 or -1. Similarly $a^3 = b^3 + 3ab^2 = b^2(b + 3ab)$ and b^2 divides a. Therefore b is also $+1$ or -1.

Thus the only possible rational roots of $x^2 - 3x - 1 = 0$ are $+1$ or -1. Since neither $+1$ nor -1 is a root of the equation, $x^3 - 3x - 1 = 0$ is a irreducible cubic equations and its root cannot be constructed with straight edge and compasses.

Therefore $\cos 20°$ cannot be constructed with straight edge and compasses. Since an angle can be constructed if and only if its cosine can be constructed, we have shown that an angle of $20°$ is not constructible, and that the general angle cannot be trisected.

An alternative method of showing that the cubic $x^3 - 3x - 1 = 0$ is irreducible is to use the following theorem from algebra. If the equations $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ (with all the coefficients integers) has a rational root $\frac{a}{b}$, then a is a factor of c_n and b is a factor of c_0. [A prof of this theorem can be found in *Number: Rational and Irrational* by Ivan Niven.] Again we reach the conclusion that ± 1 are the only candidates for rational roots.

O Problema de Trissectar um Ângulo

Certos ângulos podem ser trissectados sem dificuldade. Por exemplo, um angulo reto pode ser trissectado, desde que um ângulo de 30° possa ser construído. Todavia, não existe procedimento, usando somente uma régua sem marcas e compasso, para construir um terço de uma ângulo arbitrário.

Provaremos essa afirmação mostrando que um ângulo de 60° não pode ser trissectado. Par esse propósito faremos uso de uma fórmula desenvolvida em um capítulo anterior.

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Seja $3\theta = 60°$, então $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Seja também $x = 2\cos\theta = 2\cos 20°$.

Então

$$\frac{1}{2} = \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

ou

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Mostraremos que a equação cúbica $x^3 - 3x - 1 = 0$ é irredutível. Para isso, suponha $x = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros sem fator comum maior que 1, $b \neq 0$. Então $\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a}{b} - 1 = 0$ e $a^3 - 3ab^2 = b^3$, ou $b^3 = a(a^2 - 3b^2)$ e a divide b^3.

Sendo que a e b não têm fator comum maior que 1, a deve ser 1 ou -1. Similarmente $a^3 = b^3 + 3ab^2 = b^2(b + 3ab)$ e b^2 divide a. Portanto b também é $+1$ ou -1.

Disso, as únicas raízes racionais possíveis para $x^2 - 3x - 1 = 0$ são $+1$ ou -1. Sendo que nem $+1$ e nem -1 é uma raiz da equação, $x^3 - 3x - 1 = 0$ é uma equação cúbica irredutível e suas raízes não podem ser construídas com régua e compasso.

Portanto $\cos 20°$ não pode ser construído com régua e compasso. Sendo que um ângulo pode ser construído se e somente se seu cosseno pode ser construído, mostramos que um ângulo of 20° não é construível, e que o ângulo geral não pode ser trissectado.

Um método alternativo pra mostrar que a equação cúbica $x^3 - 3x - 1 = 0$ é irredutível é usar o seguinte teorema da álgebra. Se a equação $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$ (com todos so coeficiente inteiros) tem uma raiz racional $\frac{a}{b}$, então

a é um fator de c_n e b é um fator de c_0. [Uma prova desse teorema pode ser encontrada em *Number: Rational and Irrational* de Ivan Niven.] Novamente chegamos a conclusão que ± 1 são os únicos candidatos a raízes racionais.